Soluzioni allenamenti ai Giochi d'Autunno novembre 2020

Ronny Montagnani

21 marzo 2021

Ver: 1.0

Questiti per categorie

- cat CE: quesiti da 1 a 8
- cat C1: quesiti da 5 a 12
- cat C2: quesiti da 7 a 14
- cat L1: quesiti da 9 a 16
- cat L2: quesiti da 11 a 18

1 Le età

La risposta è **15** anni.
Matteo ha 3 anni in più del fratellino Nathan. Quando Matteo avrà il doppio di età, cioè 18 anni, Nathan ne avrà sempre 3 in meno, cioè **15 anni**.

2 Numeri che passione

La risposta è **6** numeri.
Jacopo utilizza le 3 cifre maggiori di 6, cioè: 7, 8 e 9. I numeri diversi che può scrivere sono velocemente elencabili:

- 678
- 687
- 768
- 786

- 867
- 876

Oppure si potevano calcolare considerando le permutazioni possibili di 3 elementi che sono $3! = \mathbf{6}$.

3 Piccoli, per favore

La risposta è **6158**.
Dalle regole che si è data Chiara ricaviamo il più piccolo numero scrivibile cercando di usare le più piccole cifre possibili. Come prima cifra utilizziamo **2** (non potendo usare lo **0**), poi come seconda cifra utilizziamo **0**, come terza cifra **4** e come quarta cifra **6** ottenendo **2046**.
Per costruire il più piccolo numero possibile superiore a 2046, basta sostituire l'ultima cifra con **8** ottenendo **2048**, e in modo analogo il più piccolo numero successivo è **2064**.
Sommiamo i 3 numeri ed otteniamo:

$$\begin{array}{r} 2046\ + \\ 2048\ + \\ 2064\ = \\ \hline \mathbf{6158} \end{array}$$

4 Problema vosgiano

La risposta è **88**.
Ci sono 12 modi di inserire le cifre del numero 1998 nell'espressione. Un modo per risolvere il problema può essere quello di calcolare i 12 risultati ed individuare quello più grande. Oppure possiamo ragionare cercando di rendere più grande possibile la moltiplicazione, usando le due cifre 9 e quindi minimizzare la sottrazione usando 1 al terzo posto.

$$9 \times 9 - 1 + 8 = 88$$

5 Un doppio sconto

La risposta è **14,40**.
Il primo sconto toglie al costo del gioco il 20%:

$$\text{sconto} = 20 \times 20\% = 4$$
$$\text{costo scontato} = 20 - 4 = 16$$

Il secondo sconto toglie un ulteriore 10

$$\text{sconto} = 16 \times 10\% = 1,60$$
$$\text{costo scontato} = 16 - 1,6 = \mathbf{14{,}40}$$

6 In equilibrio

La risposta è **6** grammi.
La bilancia ci mostra che:

(un quadrato e un cerchio) + 2 cerchi

pesano come

(un quadrato e un cerchio) + un quadrato

quindi un quadrato pesa come due cerchi.
Visto che un quadrato pesa 12g allora un cerchio pesa **6g**.

7 Il padre di Alan

La risposta è **98**.
Il numero visto da Alan, capovolto, è un 85. Il successivo quindi è il numero 86 che capovolto viene visto da Alan come un **98**.

8 L'allineamento

La risposta è **5**.
I primi 9 numeri sono composti da una sola cifre mentre i successivi hanno 2 cifre. Cercare la 98^a cifra significa cercare la 89^a $(98 - 9)$ cifra dopo il numero 9. Scorrere 88 cifre dopo il numero 9 significa scorrere 44 numeri dopo il 9 e quindi raggiungere il numero $9 + 44 = 53$. La successiva cifra è la 98^a, ed è la cifra **5** del numero 54.

9 Salita e discesa

La risposta è **83**.
La bidonvia è composta da 55 bidoncini in salita e 55 bidoncini in discesa. I 55 bidoncini in salita sono occupati alternativamente da una persona e da due persone, quindi abbiamo due configurazioni possibili:

a) Il primo bidoncino ha 1 persona e come lui tutti quelli in posizione dispari (terzo, quinto, ecc...). Quelli in posizione pari hanno 2 persone.

b) Il primo bidoncino ha 2 persone e come lui tutti quelli in posizione dispari (terzo, quinto, ecc...). Quelli in posizione pari hanno 1 persona.

Il secondo caso ha una persona in più rispetto al primo. Il numero di persone è dato da 2 x (bidoncini in posizione pari: 28) + 1 x (bidoncini in posizione dispari: 27) = **83**.

10 Il prestito

La risposta è **48** euro.
Chiamiamo x gli euro che ha Liliana. Dal testo si ricava che il doppio di questa cifra è uguale a 72 (il prestito richiesto) più 72-x (quello manca a Liliana per poter prestare i soldi). Otteniamo un'equazione di primo grado con la seguente risoluzione:

$$\begin{aligned} 2 \times x &= 72 + (72 - x) \\ 2 \times x &= 144 - x \\ 3 \times x &= 144 \\ x &= \mathbf{48} \end{aligned}$$

11 I quindici del Pristem

La risposta è **4** modi.
Il problema chiede di contare in quanti modi è possibile ottenere 20 come somma dei tre numeri 3, 5 e 7. Osserviamo che sommando 3 numeri non possiamo raggiungere 20 in quanto la somma di 3 dispari sarà un numero dispari. I numeri da usare nella somma saranno quindi 4 o 6. Non possono essere 8 in quanto sommando il più piccolo, il 3, per 8 volte superiamo il numero 20.
Usando 4 numeri si ricava facilmente che abbiamo solo 3 possibilità: 3377, 3557 e 5555. Usanto invece 6 numeri abbiamo solo una possibilità: 333335.
I modi diversi di realizzare 20 punti sono **4: 3377, 3557, 5555 e 333335**.

12 Il concorso

La risposta è **12** partecipanti.
Il montepremi a disposizione per i classificati dal terzo in poi è $4000 - 700 = 3300$
Chiamiamo x il numero di partecipanti oltre ai primi 2. La somma che spetta a ognuno di loro, e quindi anche al terzo classificato, è $3300/x$.
La condizione imposta dal testo è che questa cifra sia maggiore di quella ricevuta dal secondo classificato, cioè 300 euro. Otteniamo quindi la disequazione:

$$\frac{3300}{x} > 300$$
$$\frac{3300}{300} > x$$
$$11 > x$$

La condizione è soddisfatta per x che vale al più 10 e quindi il numero massimo di partecipanti è **12**.

13 I vicini di Josè

Ci sono 4 risposte possibili **12, 13, 14, 15** vicini.
Cerchiamo di valutare quanti appartamenti può avere un piano rimanendo all'interno delle condizioni imposte dal problema e cioè che il 49-esimo sia al quarto piano e che tutti i piani abbiamo lo stesso numero di appartamenti.
Indichiamo il numero di appartamenti per piano con "n". Come prima valutazione cerchiamo di massimizzare questo numero. $n \times 3$ è il numero di appartamenti dei primi tre piani e questo deve essere minore di 49. Ricaviamo n = 16.
Cerchiamo ora di minimizzare il numero di appartamenti per piano. Dobbiamo trovare il più piccolo "n" tale che $n \times 4$ sia maggiore uguale a 49 in quanto l'appartamento 49 è situato al quarto piano. Il più piccolo multiplo di 4 maggiore uguale a 49 è 52, da cui ricaviamo $n = 52 : 4 = 13$.
Il numero di appartamenti può quindi andare da 13 a 16 che corrisponde ad un numero di vicini di Josè (numero di appartamenti nel piano meno il suo) che può essere **12, 13, 14, o 15**,

14 Goichiamo a Zingo

La risposta è **110592** corone syldave.

14.1 Soluzione 1

Il giocatore di Zingo ha 19 possibilità di giocata. Infatti una volta scelto quanto puntare come primo numero, chiamiamolo "a", il secondo è automaticamente fissanto in "20 - a". Il problema chiede quindi di trovare quale di queste 19 puntate porta alla vincita maggiore. Le 19 puntate portano a questi calcoli per le vincite:

1) $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 19 \cdot 19$

2) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 18 \cdot 18$

3) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 17$

4) $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 16 \cdot 16$

5) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 15 \cdot 15$

6) $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 14 \cdot 14$

7) $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 13$

8) $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 12$

9) $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 11$

10) $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$

11) $11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 9$

12) $12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 8 \cdot 8$

13) $13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 7 \cdot 7$

14) $14 \cdot 14 \cdot 14 \cdot 6 \cdot 6$

15) $15 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 5 \cdot 5$

16) $16 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 4 \cdot 4$

17) $17 \cdot 17 \cdot 17 \cdot 3 \cdot 3$

18) $18 \cdot 18 \cdot 18 \cdot 2 \cdot 2$

19) $19 \cdot 19 \cdot 19 \cdot 1 \cdot 1$

Osserviamo che le vincite "1" e la "19" sono composte dagli stessi fattori, ma la "19" è sicuramente la maggiore avendo un fattore "19" al posto di un fattore "1". Discorso analogo per la "2" rispetto alla "18". Quindi la nostra ricerca si può limitare alle puntate dalla "10" alla "19". A questo punto eseguiamo le 11 moltiplicazioni e troviamo che quella con il risultato più alto è $12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 8 \cdot 8 = 110592$ (Osservando le fattorizzazioni della varie moltiplicazioni si possono scartare alcune soluzioni, come per esempio confrontando la "10" con la "18")

14.2 Soluzione 2: analisi matematica

Il numero 20 è suddiviso nella puntata in due numeri "a" e "20-a". In caso di giocata vincente la somma ricevuta è:

$$a^3 \times (20 - a)^2 = a^3(a^2 - 40a + 400)$$

Analizzando la derivata prima di questa funzione in "a" e ponendola uguale a 0 possiamo cercare i punti di massimo o di minimo locali.

$$\frac{d}{da}[a^3(20-a)^2] =$$
$$3a^2(20-a)^2 - 2a^3(20-a) =$$
$$a^2(20-a)[(3(20-a) - 2a] =$$
$$a^2(20-a)(60-5a)$$

Ponendola uguale a 0 otteniamo 3 valori di a: 0, 20 e 12. 0 e 20 non sono casi possibili per il nostro problema. Analizziamo cosa succede per i valori intorno a 12.

Per a = 11 otteniamo: 107811

Per a = 12 otteniamo: 110592

Per a = 13 otteniamo: 107653

La funzione ha quindi un massimo per a = 12.

15 Somma di potenze

La risposta è **15708**.
Proviamo a massimizzare la somma massimizzando le potenze che ne sono gli addendi. Proviamo la soluzione:

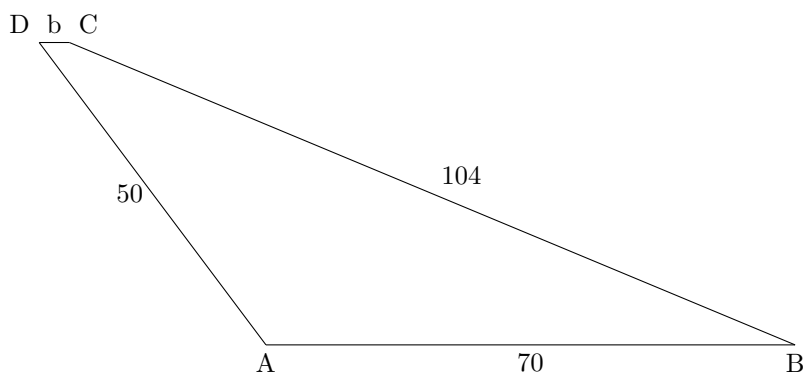
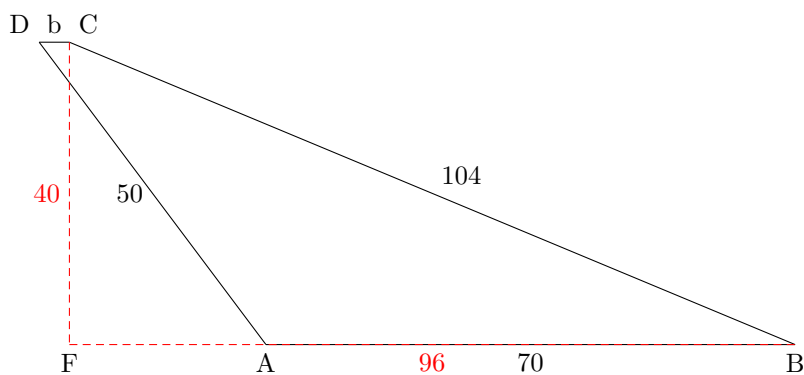
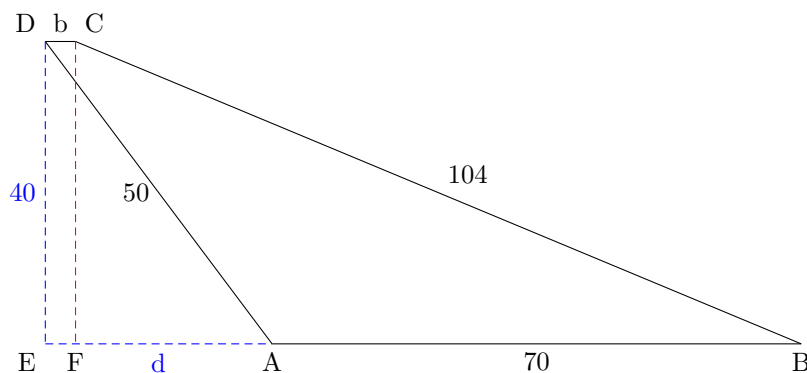
$$5^6 + 3^4 + 2^1$$

La cifra "1" rende meglio se utilizzata come esponente altrimenti se usata come base otteniamo una potenza che vale solo 1. Utilizziamola quindi con la base minore possibile visto che ha l'effetto di non aumentarne il valore.
Osserviamo che per 2 naturali a e b tali che $a > b > 2$ abbiamo che $b^a > a^b$, cioè otteniamo un numero più grande quando abbiamo un esponente più grande.
Questo significa che una volta scelta una coppia di 2 numeri tra i 4 rimasti (3,4,5,6), e di conseguenza anche l'altra, abbiamo determinato una configurazione. Per esempio se scegliamo la coppia 5 e 6 allora l'altra coppia sarà 3 e 4 e per massimizzare sceglieremo le potenze $5^6 e 3^4$. Abbiamo solo 3 modi di scegliere le due coppie (5,6 e 3,4), (4,6 e 3,5) e (4,5 e 3,6) da cui calcoliamo le somme di potenze:

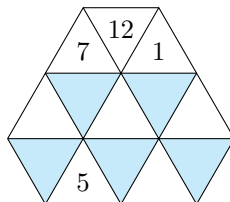
- $5^6 + 3^4 + 2^1 = 15708$
- $4^6 + 3^5 + 2^1 = 4341$
- $4^5 + 3^6 + 2^1 = 1755$

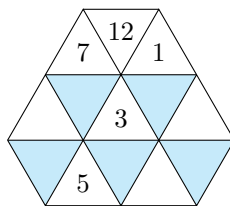
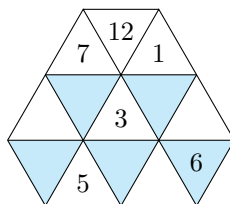
Il massimo è **15708**

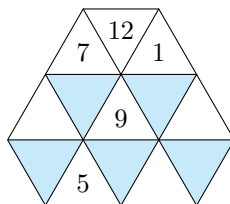
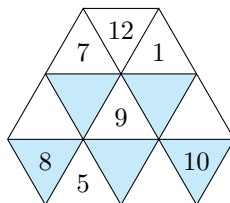
16 Il campo trapezioidale

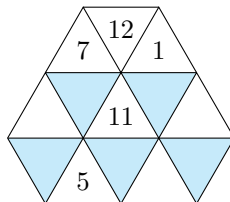
La risposta è **4** metri.
Disegnamo il campo a forma di trapezio descritto dal problema:

Visto che il trapezio è caratterizzato da lati con misura intera proviamo ad individuare dei triangoli rettangoli i cui lati abbiano misura intera, cioè vediamo se riconosciamo delle possibili terne pitagoriche.
Il numero 104 si scompone in $13 \cdot 8$. Il fattore 13 ci suggerisce la nota terna 5, 12, 13. In questo caso avremo la sua versione moltiplicata per 8 e cioè: 40, 96, 104. Evidenziamo nel disegno il triangolo rettangolo che ha quelle misure:

Possiamo utilizzare il teorema di Pitagora nuovamente sul triangolo evidenziato in blu:

$d = \sqrt{50^2 - 40^2} = 30$ (è la terna pitagorica 3,4,5 moltiplicata per 10)
Abbiamo che $\overline{EB} = \overline{EA} + \overline{AB} = 30 + 70 = 100$
da cui ricaviamo la base minore $b = \overline{EB} - \overline{FB} = 100 - 96 = \mathbf{4}$

17 Numeri

Ci sono 2 risposte: **11 e 13**.

Tra i numeri da collocare ci sono 4 dispari e 5 pari. I numeri pari hanno un MCD almeno pari a 2 quindi non possono stare in caselle vicine. Dal disegno vediamo che questi dovranno occupare le cinque caselle alternate evidenziate. Procediamo per tentativi provando ad inserire i numeri dispari (3, 9, 11, 13) nella casella centrale.

Primo tentativo, inseriamo il numero 3:

Il numero 6 non può stare vicino né al 5 (numeri consecutive) né al 3 (MCD diverso da 1). Rimane solo la casella in basso a destra.

Osserviamo che non è possibile inserire il numero 4 in quanto sarebbe vicino a 3 o 5 (consecutive) o al 6 (MCD diverso da 1). Passiamo al prossimo tentativo.

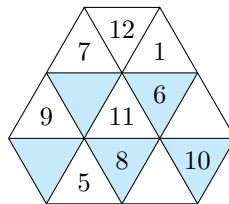
Secondo tentativo, inseriamo il numero 9:

In questa configurazione abbiamo che il numero 10 può essere inserito solo in basso a destra non potendo stare vicino né al 5 nè al 9. Di seguito osserviamo il numero 8 potrà essere inserito solo in basso a sinistra in quanto non può stare vicino né al 9 né al 10.

A questo punto non c'è spazio per il numero 6. Passiamo al prossimo tentativo.

Terzo tentativo, inseriamo il numero 11:

Da questa configurazione abbiamo i seguenti inserimenti di numeri obbligati:

10 non può stare vicino a 11 o al 5

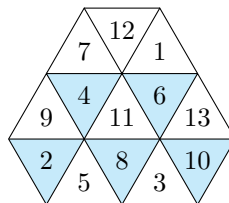
9 non può stare vicino al 10

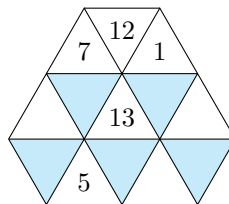
6 non può stare vicino al 5

8 non può stare vicino al 9

Da cui proseguiamo:

3 non può stare vicino al 6

13 unica casella libera per i numeri dispari (sfondo bianco)

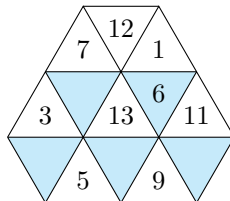
2 e 4 possiamo metterli a piacimento nelle due caselle rimaste libere

Abbiamo ottenuto un riempimento compatibile con le regole del problema.

Quarto tentativo, inseriamo il numero 13:

Da questa configurazione abbiamo i seguenti inserimenti di numeri obbligati:

6 non può stare vicino a 5 e 7, quindi abbiamo a disposizione le due caselle a destra. però i due dispari rimasti, 3 e 9, non possono a loro volta stare vicino al numero 6, quindi questo può essere collocato solo nella casella sotto l'1, altrimenti non riusciamo ad inserire sia il 3 che il 9.

11 solo il dispari 11 può stare vicino al 6

3 non può stare nella casella sotto al 6 altrimenti non cè spazio per il 2 e il 4, quindi occupa la casella bianca a sinistra

9 è rimasta una sola casella bianca libera per i numeri dispari

Da cui proseguiamo:

10 non può stare vicino né al 5 né all'11

4 non può stare vicino al 5

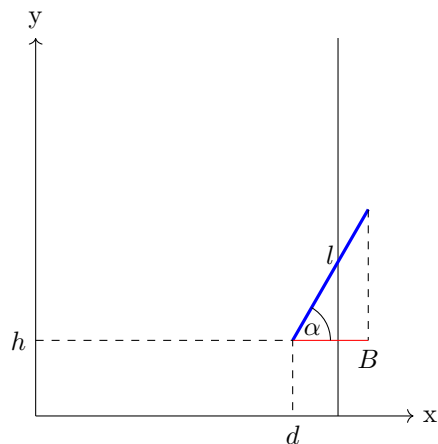
8 non può stare vicino al 9

2 ultima casella libera

Abbiamo ottenuto un riempimento compatibile con le regole del problema.

Ci sono quindi due possibili soluzioni: **11** e **13**.

18 L'ago di Buffon

La risposta è $\frac{7}{110}$.
Nella seguente figura è raffigurato in blu un segmento che rappresenta un ago caduto sul pavimento che ha intersecato una riga. In rosso è rappresentata la componente dell'ago rispetto all'asse delle x.

Osserviamo che l'intersezione di un ago con una riga verticale è determinata dalla posizione del suo vertice più a sinistra, che è indicata con d e della lunghezza del segmento rosso che corrisponde a $l \cos \alpha$.
In altre parole se la coordinata del punto B supera la larghezza di un'asse (20cm) allora l'ago ha intersecato la riga. La condizione è quindi:

$$B = d + 2 \cos \alpha > 20$$
$$d > 20 - 2 \cos \alpha \quad \text{per} - \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

Consideriamo per simmetria solo metà di tutti gli angoli in quanto la coppia di angoli α e $\pi + \alpha$ si riferisce a rotazioni equivalenti dell'ago.
La posizione d e l'angolo α sono le due variabili aleatorie del getto dell'ago.
La variabile angolo è uniformemente distribuita tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$. Visto che la probabilità totale è 1 allora la densità di probabilità di un determinato angolo α è $P(\alpha) = \frac{1}{\pi}$.
Anche la variabile posizione è uniformemente distribuita tra 0 e 20 e quindi la densità di probabilità di una posizione d è $\frac{1}{20}$. Da questa si deriva che la probabilità di intersecare una riga, cioè la probabilità che $d > 20 - 2 \cos \alpha$ per una determinato angolo α, è:

$$q(\alpha) = \frac{2 \cos \alpha}{20} = \frac{\cos \alpha}{10}$$

La possiamo leggere come il rapporto tra i casi favorevoli ($2 \cos \alpha$) e i casi totali (20).
La densità di probabilità che l'ago intersechi una riga è quindi data dal prodotto tra la densità di probabilità associata ad un angolo e la probabilità di intersecare per quell'angolo:

$$G(\alpha) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\cos \alpha}{10} = \frac{\cos \alpha}{10\pi}$$

La probabilità richiesta dal problema è la somma di questa densità su tutti i possibili angoli $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \alpha}{10\pi} \, dx =$$

$$= \frac{1}{10\pi} \sin \alpha \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{2}{10\pi} = \frac{1}{5\pi} = \frac{7}{5 \cdot 22} = \frac{7}{110}$$